Solution #1

On doit calculer $P(m_i \text{ et } r_j) = P(m_i)\,P(r_j | m_i)$ pour $i = 0, 1$ et $j = 0, 1, 2$. Ces valeurs sont placées dans la table suivante avec les probabilités qui sont données dans le problème:

	r_0	r_1	r_2
m_0	$\underline{0.3}$	0.18	$\underline{0.12}$
m_1	0.16	$\underline{0.20}$	0.04

(On vérifie facilement que la somme de ces probabilités donne 1). Le récepteur optimal maximize

$$P(m_i | r_j) = \frac{P(m_i \text{ et } r_j)}{P(r_j)}$$

pour chaque j. De façon équivalente, pour chaque r_j il suffit de choisir m_0 ou m_1 de façon à maximizer $P(m_i \text{ et } r_j)$; les valeurs maximales sont soulignées dans la table ci-dessus. On a

$$r_0 \longmapsto m_0$$
$$r_1 \longmapsto m_1$$
$$r_2 \longmapsto m_0$$

La probabilité que le récepteur prenne la bonne décision est:

$$P(\mathcal{C}) = P(r_0 \text{ ou } r_2 | m_0)\,P(m_0) + P(r_1 | m_1)\,P(m_1)$$
$$= (0.5 + 0.2) \times 0.6 + 0.5 \times 0.4$$
$$= 0.62$$

$$\Rightarrow P(\mathcal{E}) = 1 - P(\mathcal{C}) = 0.38$$

Solution #2

X_3 est évidemment une variable aléatoire Gaussienne et

$$\overline{X_3} = -3 \quad , \quad Var(X_3) = 9.$$

On a alors immédiatement

$$p_{X_3}(x_3) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-(x_3+3)^2/18}$$

$$P(X_3 > -2.4) = Q\left(\frac{-2.4+3}{\sqrt{9}}\right)$$

$$= Q(0.2) \approx 0.4207$$

Solution #3

Lorsque $e^{-1} \leq y < 1$ on a

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(e^X \leq y) \\
&= P(X \leq \ln(y)) \\
&= F_X(\ln(y))
\end{aligned}
$$

puisque ln( ) est une fonction strictement croissante

$$\Rightarrow p_Y(y) = p_X(\ln(y)) \times \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

lorsque $e^{-1} \leq y < 1$ on a $-1 < \ln(y) \leq 0$ et puisque X est uniformément distribuée entre -1 et 0 on a que $p_X(\ln(y)) = 1$