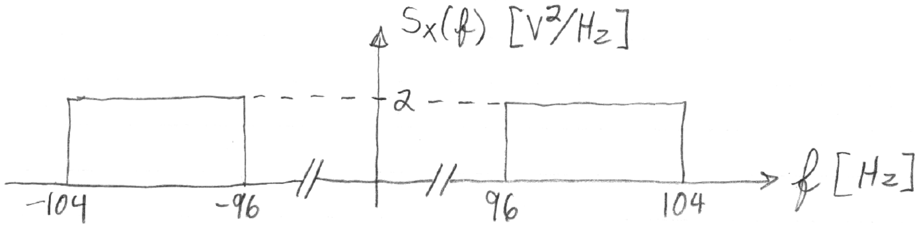
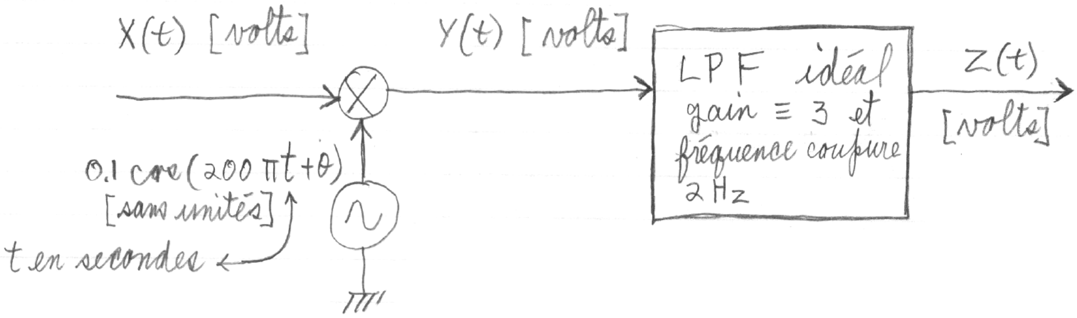
Exemple: Soit $X(t)$ un processus aléatoire gaussien ergodique dont la densité spectrale de puissance est :



Le voltage $X(t)$ est injecté dans le système suivant :



où θ est une variable aléatoire uniforme entre 0 et 2π qui est statistiquement indépendante de $X(t)$.

1. Calculez les puissances AC, DC et totales de $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$ en dBm avec une impédance de référence de $50\,\Omega$.
2. Calculez la probabilité de l'événement
$$Z(1 \text{ s}) + Z(1.25 \text{ s}) > 850 \text{ mV}.$$

Solution: La puissance totale de $X(t)$ est :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\mathrm{d}f &= 2 \times (104 - 96) \times 2 \\
&= 32 \text{ V}^2 \\
&\equiv 10 \log_{10}\left(\frac{32 \text{ V}^2/50\,\Omega}{1 \text{ mW}}\right) \text{ dBm} \\
&= 28.0618 \text{ dBm } (50\ \Omega)
\end{aligned}$$

Theorem 0.1. *La puissance DC ($f = 0$) est donnée par*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} S_X(f) \mathrm{d}f = m_X^2$$

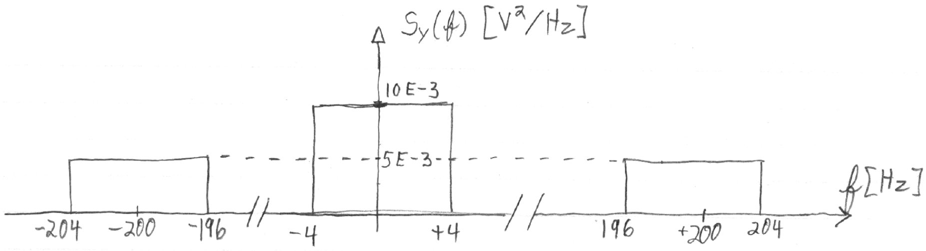
Ceci signifie que $S_x(f)$ comprend l'impulsion $m_X^2 \delta(f)$qui est située à $f = 0$. Si $S_X(f)$ ne possède pas d'impulsions à $f = 0$ alors $m_X^2 = m_X = 0$ et la puissance DC est nulle.

D'après le résultat ci-dessus on obtient immédiatement que la puissance DC de $X(t)$ est nulle et la puissance AC est de 28.0618 dBm puisque dans la présente situation $S_X(f)$ ne possède pas d'impulsions à $f = 0$.

La densité spectrale de puissance de $Y(t)$ est donnée par (en combinant 2 formules qui sont sur la feuille de formule):

$$Y(t) = aX(t) \cos(2\pi f_o t) \Rightarrow S_Y(f) = \frac{a^2}{4} S_X(f - f_0) + \frac{a^2}{4} S_X(f + f_0)$$

avec $a = 0.1$ et $f_0 = 100$ Hz. On obtient alors:



Note: $5\text{E-}3 = 2 \times 0.1^2/4$
$10\text{E-}3 = 5\text{E-}3 + 5\text{E-}3$

La puissance totale de $Y(t)$ est

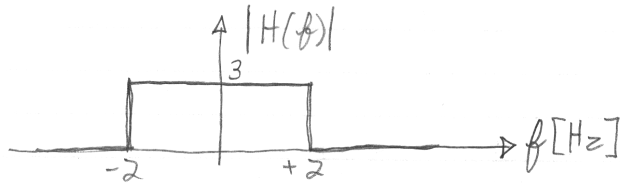
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f) \mathrm{d}f &= 2 \times (204 - 196) \times 5 \times 10^{-3} + 2 \times 4 \times 10 \times 10^{-3} \\
&= 0.16 \text{ V}^2 \\
&= 5.015 \text{ dBm } (50\ \Omega)
\end{aligned}$$

Puisque $S_Y(f)$ ne comprend pas d'impulsions à $f = 0$, la puissance DC de $Y(t)$ est nulle et la puissance AC de $Y(t)$ est 5.015 dBm.

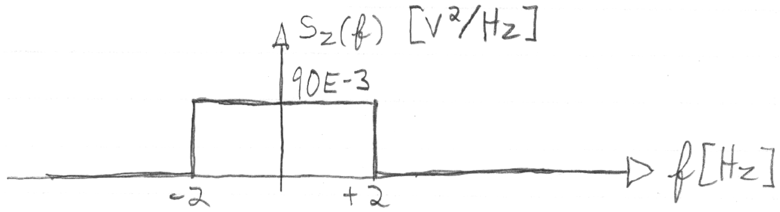
La densité spectrale de puissance de $Z(t)$ est donnée par

$$S_Z(f) = S_Y(f)\,|H(f)|^2$$

où $|H(f)|$ est le module de la réponse en fréquence du LPF idéal de gain 3 et fréquence de coupure 2 Hz:



On obtient alors facilement:



La puissance totale de $Z(t)$ est:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} S_Z(f)\mathrm{d}f &= 2 \times 2 \times 90 \times 10^{-3} \\ &= 0.36 \text{ V}^2 \\ &= 8.57 \text{ dBm } (50\ \Omega)\end{aligned}$$

$S_Z(f)$ n'a pas d'impulsions à $f = 0$ donc la puissance DC de $Z(t)$ est nulle et sa puissance AC est 8.57 dBm.

Pour calculer la probabilité de

$$Z(1 \text{ s}) + Z(1.25 \text{ s}) > 850 \text{ mV}$$

il nous faut la fonction de moyenne m_Z et la fonction d'autocovariance $\mathscr{L}_Z(\tau)$. La puissance DC de $Z(t)$ est $0 = m_Z^2$ (voir ci-dessus). On a alors

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_Z(\tau) &= \mathscr{R}_Z(\tau) - m_Z^2 \\ &= \mathscr{R}_Z(\tau)\end{aligned}$$

où $\mathscr{R}_Z(\tau) = \mathscr{F}^{-1}\big(S_X(f)\big)$. Avec les feuilles de formules on obtient facilement

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_Z(\tau) &= 0.36\,\mathrm{sinc}(4\tau)\ [\mathrm{V}^2] \\
&= \mathscr{L}_Z(\tau) \\
m_Z &= 0\ [\mathrm{V}]
\end{aligned}$$

On définit

$$\begin{aligned}
W &\triangleq Z(1\ \mathrm{s}) + Z(1.25\ \mathrm{s}) \\
&= [Z(1\ \mathrm{s}) \quad Z(1.25\ \mathrm{s})] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

W est une variable aléatoire gaussienne puisque

$$X(t) \text{ est gaussien } \Rightarrow Y(t) \text{ est gaussien } \Rightarrow Z(t) \text{ est gaussien}$$

Les moyennes et variances de W sont données par :

$$\begin{aligned}
\overline{W} &= [\overline{Z(1\ \mathrm{s})} \quad \overline{Z(1.25\ \mathrm{s})}] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= [m_Z \quad m_Z] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= [0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(W) = [1 \quad 1] &\times \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(Z(1),\, Z(1)) & \mathrm{Cov}(Z(1),\, Z(1.25)) \\ \mathrm{Cov}(Z(1.25),\, Z(1)) & \mathrm{Cov}(Z(1.25),\, Z(1.25)) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
= [1 \quad 1] &\times \begin{bmatrix} \mathscr{L}_Z(1-1) & \mathscr{L}_Z(1.25-1) \\ \mathscr{L}_Z(1-1.25) & \mathscr{L}_Z(1.25-1.25) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
= [1 \quad 1] &\times \begin{bmatrix} 0.36 & 0 \\ 0 & 0.36 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
= 2 \times 0.36 &= 0.72\ [\mathrm{V}^2]
\end{aligned}$$

(On remarque que les variables aléatoires $Z(1)$ et $Z(1.25)$ sont décorelées et sont conséquemment statistiquement indépendantes, même si elles proviennent de l'échantillonnage du même processus aléatoire). On obtient

$$\begin{aligned} P\big(Z(1) + Z(1.25) > 0.85\big) &= P\big(W > 0.85\big) \\ &= Q\Big(\frac{0.85}{\sqrt{0.72}}\Big) = Q(1) = 0.1582 \end{aligned}$$

□

Exemple: Soit $X(t)$ un processus aléatoire gaussien ergodique dont la fonction d'autocorrélation est :

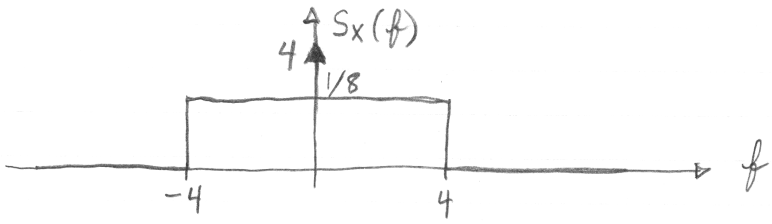
$$\mathscr{R}_X(\tau) = 4 + \mathrm{sinc}(8\tau)$$

Le voltage $X(t)$ est injecté dans un filtre passe-bas idéal de gain 3 et fréquence de coupure 2. La sortie du filtre est un processus aléatoire qu'on dénoté par $Z(t)$.

1. Calculez les puissances AC, DC et totale de $X(t)$.
2. Calculez les fonctions de moyenne et d'autocovariance de $X(t)$. Calculez la densité spectrale de puissance de $X(t)$.
3. Calculez les fonctions de moyenne, d'autocorrélation et d'autocovariance de $Z(t)$.
4. Calculez les puissances AC, DC et totale de $Z(t)$.

Solution:

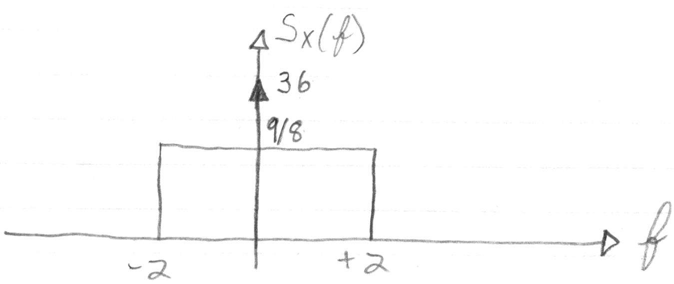
1. Puissance totale de $X(t) \equiv \mathscr{R}_X(0) = 4 + 1 = 5$
   Puissance DC de $X(t) \equiv m_X^2 = \lim_{\tau\to\infty} \mathscr{R}_X(\tau) = 4$
   Puissance AC de $X(t) \equiv 5 - 4 = 1$
2. $m_X = \sqrt{\lim_{\tau\to\infty} \mathscr{R}_X(\tau)} = 2$
   $\mathscr{L}_X(\tau) = \mathscr{R}_X(\tau) - m_X^2 = \mathrm{sinc}(8\tau)$
   $S_X(f) = \mathscr{F}\big(\mathscr{R}_X(\tau)\big) = \mathscr{F}(4) + \mathscr{F}\big(\mathrm{sinc}(8\tau)\big) = 4\delta(f) + 1/8\,\Pi(f/8)$.
   $S_X(f)$ est esquissé ci-dessous:



3. On calcule d'abord la densité spectrale de puissance de $Z(t)$:

$$\begin{aligned} S_Z(f) &= S_X(f)\,|H(f)|^2 \\ &= 36\,\delta(f) + 9/8\,\Pi(f/4) \end{aligned}$$

qui est esquissée ci-dessous:



Il en découle que

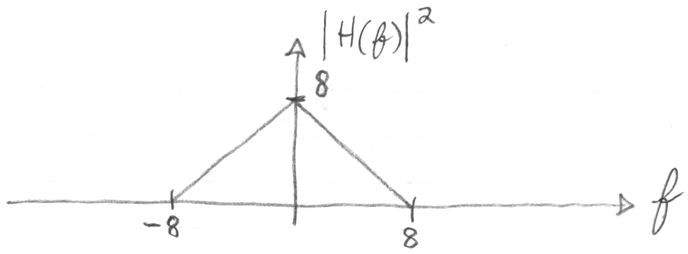
$$\begin{aligned} \mathscr{R}_Z(\tau) &= \mathscr{F}^{-1}\big(S_Z(f)\big) \\ &= 36 + 4.5\,\mathrm{sinc}(4\tau) \\ m_Z &= \sqrt{\lim_{\tau\to\infty} \mathscr{R}_Z(\tau)} = 6 \\ \mathscr{L}_Z(\tau) &= 4.5\,\mathrm{sinc}(4\tau) \end{aligned}$$

4. On obtient:

Puissance totale de $Z(t) \equiv \mathscr{R}_Z(0) = 40.5 = \int_{-\infty}^{\infty} S_Z(f)\,\mathrm{d}f$
Puissance DC de $Z(t) = m_Z^2 = 36$
Puissance AC de $Z(t) = 40.5 - 36 = 4.5$

$\square$

Problème : Répétez le dernier exemple avec un filtre idéal dont la réponse en fréquence est telle que $|H(f)|^2$ aie la forme ci-dessous :



au lieu d'un filtre passe-bas idéal.

Réponses: Pour $Z(t)$ on a: puissance DC $\equiv 32$, puissance AC $\equiv 6$, puissance totale $\equiv 38$, $\mathscr{R}_Z(\tau) = 32 + 4\,\mathrm{sinc}(8\tau) + 2\,\mathrm{sinc}^2(4\tau)$.