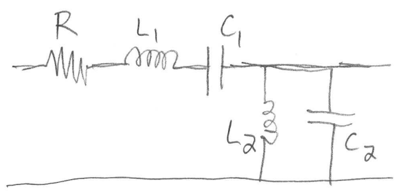
Réponses de l'examen final AY2016-2017

1. (a) $P_x = \frac{2}{4}\int_0^1 3^2 \mathrm{d}t + \frac{2}{4}\int_1^2 (6-3t)^2 \mathrm{d}t = 6$
   (b) Facile mais long et encombrant.
   (c) $\mathscr{F}(x(t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{G(n/4)}{4}\,\delta(f-n/4)$ et il suffit de remplacer avec $G(\ )$ obtenu en (b) et simplifier.
   (d)
$$S_x(f) = \frac{81}{16}\,\delta(f) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{36}{n^4\,\pi^4}\Big(\Re\big((-1)^{n+1}+j^n\big)\Big)^2\,\delta(f-n/4)$$
   (e) Largeur de bande est $\frac{1}{4}$.
2. (a) Refer to course notes.
   (b) Refer to course notes.
   (c) $W < 5$ kHz, $B_1 = 10$ kHz, $G_1 = 0.05\times 10^{-3}$.
   (d) $f_{LO} = 1 \text{ MHz} \pm 250 \text{ kHz} = \begin{cases} 1.25 \text{ MHz} \\ 750 \text{ kHz} \end{cases}$
   $10 \text{ kHz} < B_2 < 490$ kHz and $G_2 = 2$.
3. (a) Les zéros sont: -1, $1\angle\pm 108°$, $1\angle\pm 144°$, ou sous forme rectangulaire: -1, $-0.309017 \pm j\,0.951057$, $-0.809017 \pm j\,0.587785$.
   (b) $H(s) = \frac{s^3}{s^3+4s^2+8s+8}$.
   (c) Le circuit est:



et les composantes sont:

R	L_1	C_1	L_2	C_2
1000.0	1.41421 H	7.07107 nF	3.53553 mH	2.82843 μF
5000.0	7.07107 H	1.41421 nF	17.6777 mH	0.565685 μF
10000.0	14.1421 H	0.707107 nF	35.3553 mH	0.282843 μF

Les deux fréquences de coupure à 3 dB sont:

$$\omega_L = 9753.124512 \text{ rad/s},\ \omega_H = 10253.12451 \text{ rad/s}$$

ou de façon équivalente:

$$f_L = 1552.257976 \text{ Hz},\ f_H = 1631.835447 \text{ Hz}$$

4. (a) Le récepteur optimal est:

$$\begin{array}{ccc} r_1 & \mapsto & m_2 \\ r_2 & \mapsto & m_1 \end{array}$$

et la probabilité d'erreur est $\frac{1}{3}$.

(b) $P\big(A \cup \big((\overline{B} \cap D) \cap \overline{C}\big) \cup E\big) = Q(2) + \Big(1 - Q(1.5) - \big(1 - Q(0.75)\big)\Big) + Q(0.5) \approx 0.491108$.

(c) $E(Y) = \overline{Y} = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2 = 3$ et $P(-0.5 < Y \leq 2.5) = Q(\frac{-1.5}{\sqrt{3}}) - Q(\frac{1.5}{\sqrt{3}}) \approx 0.61352376923$.

(d)

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{-y/2}}{2} & ; \quad y \geq 0 \\ 0 & ; \quad y < 0 \end{cases}$$

Y est une variable aléatoire exponentielle.

5. (a) $\mathscr{R}(\tau) = 1.005 \, \mathrm{sinc}(402\tau)$.

(b)

$$\begin{aligned} \text{Puissance totale de } X(t) &\equiv 1.005 \\ \text{Puissance DC de } X(t) &\equiv 0 \\ \text{Puissance AC de } X(t) &\equiv 1.005 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \text{Puissance totale de } Y(t) &\equiv 2.01 \\ \text{Puissance DC de } Y(t) &\equiv 0 \\ \text{Puissance AC de } Y(t) &\equiv 2.01 \end{aligned}$$

(d) On se sert de $S_Y(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2$ et de la table des paires de Fourier.

(e) $P(Y(2 \times 10^{-3}) - 2Y(5 \times 10^{-3}) > 6.5) \approx Q\Big(\frac{6.5}{\sqrt{8.0360}}\Big) \approx 0.01092562$.